1 INTEGRAL TAK TENTU (*INDEFINITE*)

A. Anti Turunan, Anti Diferensial, dan Integral Taktentu

Definisi 1.1
Jika fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I dan
F'(x) = f(x), $\forall x \in I$ maka F disebut *anti turunan* atau *fungsi primitif dari f* pada selang I.

Contoh 1.2
1. Perhatikan fungsi f(x) = 2. Dipilih $F_1(x) = 2x$ atau
   $F_2(x) = 2x + 2006$, maka F_1 atau F_2 masing-masing suatu anti turunan f.

Definisi1.3
Anti diferensial adalah *bentuk paling umum* dari suatu anti turunan fungsi. Jika F'(x) = f(x), $\forall x \in I$ maka anti diferensial dari fungsi f adalah F(x) + C dengan C suatu konstanta.

Definisi 1.4
Misalkan fungsi f tedefinisi pada selang terbuka I dan F adalah suatu anti turunan f. *Proses* menentukan anti diferensial dari fungsi f disebut *integral tak tentu* fungsi f pada selang I, ditulis

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ dengan C sebarang konstanta.

Dibaca integral taktentu fungsi f terhadap x.

Teorema 1.5(sifat linear)
Misalkan f dan g masing-masing suatu fungsi serta k suatu konstanta maka berlaku

$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ dan $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$.

Teorema 1.6 (integral parsial)
Jika u dan v masing-masing fungsi yang mempunyai turunan pada selang I maka $\int u\,dv = uv - \int v\,du.$

C. Beberapa Rumus teknis

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \; dgn \; n \neq -1$

3. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

4. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

5. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

7. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

9. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C.$

rumus lainnya dapat dilihat di buku.

2 INTEGRAL TERTENTU (DEFINITE)

A. Notasi Sigma dan Induksi Matematika

Definisi 2.1
Notasi sigma untuk penjumlahan berhingga ataupun takberhingga adalah sebagai berikut.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n. \qquad \text{(berhingga)}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots. \qquad \text{(tak berhingga)}$$

Khususnya untuk penjumlahan berhingga konstanta dirumuskan

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + \cdots + c = nc.$$

Teorema 2.2 (linear)

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{n} c\,x_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i \text{, untuk suatu konstanta c.}$$

Induksi Matematika biasanya digunakan untuk membuktikan suatu *pernyataan* yang *berlaku/benar* untuk setiap *bilangan asli*.
Prinsip induksi matematika adalah

- ★ Pertama, *dibuktikan* pernyataan benar untuk n = 1.
- ★ Kedua, *diandaikan* pernyataan benar untuk n = k, lalu *dibuktikan* pernyataan benar untuk n = k + 1.
- ★ Disimpulkan : benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 2.3

1. Proof these formula

   a. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ *b.* $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. Untuk setiap bilangan asli n berlaku

   a. $2^n \geq 2n$ b. $n^3 - 8$ habis dibagi oleh $n - 2$.

3. Untuk semua bilangan asli n berlaku

   i. $n < 2^n$ ii. $(a - b)$ adalah faktor dari $(a^n - b^n)$.

4. Conjecture a formula for the sum

   a. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

   b. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$

and check your conjecture by using mathematical induction.

B. Jumlah Riemann

Teori tentang integral (tertentu) biasanya didahului dengan pembentukan suatu partisi.

Definisi 2.4

1. Jika $[a,b] \subset \mathbb{R}$ suatu selang tertutup maka suatu partisi (*partition*) P_n pada selang $[a,b]$ adalah sebarang *himpunan* yang terdiri atas $(n+1)$ bilangan yaitu $P_n = \{a = x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n = b\}$ dengan *syarat* $x_{i-1} < x_i$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
2. Panjang subselang ke-i adalah $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ dan $\|P_n\| = \max\{\Delta_i x \mid i = 1, 2, 3, \cdots, n\}$ disebut *norm* partisi P_n.
3. Jika P dan P' masing-masing partisi pada selang [a,b] serta $P \subset P'$ maka P' disebut partisi penghalus (*refinement*) dari P.

Contoh 2.5

Given the closed interval [1,9].

We have more than one partition P_8 on [1,9], i.e.

$P_8 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $P_{8'} = \{1,3,3\frac{1}{2},5,6,7,7\frac{1}{2},8,9\}$; or $P_{8''} = \{1,4,7,7\frac{1}{5},7\frac{2}{5},7\frac{3}{5},7\frac{4}{5},8,9\}$.

Clearly $\|P_8\| = 1$; $\|P_8\| = 2$; or $\|P_8\| = 3$.

$P_{10} = \{1,2,3,3\frac{1}{2},4,5,6,7,7\frac{1}{2},8,9\}$ is a partition on [1,9] too. Clearly P_{10} is a refinement of P_8 and $P_{8'}$.

C. Integral Riemann

Ada bermacam-macam integral di antaranya integral Newton, integral Riemann, integral Lebesgue, integral Henstock-Kurzweil, integral Denjoy-Perron, dan integral Petit.

Definisi 2.6

Diberikan fungsi f : [a,b] → ℝ dan P partisi pada selang [a,b] serta $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Fungsi f dikatakan terintegral Riemann (*Riemann integrable*) pada selang [a,b] jika $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_i x$ ada.

Selanjutnya ditulis $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_i x = \int_a^b f(x)\,dx$ yaitu integral tertentu fungsi f dari a sampai b.

Dari definisi integral tertentu ini diperoleh :

- Integral tertentu $\int_a^b f(x)\,dx$ adalah bilangan real (bilangan negatif, nol, atau positif) bukan rumus fungsi, sebab merupakan nilai suatu limit.
- Jika partisi P terbagi menjadi n buah subselang yang sama panjang maka berlaku $\|P\| \to 0$ bhb $n \to \infty$.
- Bagaimana dengan partisi $P = \left\{0, \cdots, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ pada [0,1]?

Teorema 2.7

a. Jika fungsi f kontinu pada selang [a,b] maka fungsi f terintegral Riemann pada selang [a,b].

b. Untuk fungsi konstan diperoleh $\int_a^b k\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k\,\Delta_i x$ = k(b − a).

Teorema 2.8 (linear)

Jika f dan g masing-masing fungsi yang terintegral Riemann pada selang [a,b] serta k suatu konstanta maka

i. fungsi kf dan fungsi (f + g) masing-masing juga terintegral Riemann pada selang [a,b]

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

ii. $\int_a^b (kf)(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

Teorema 2.9

Jika fungsi f kontinu pada selang yang memuat a, b, dan c maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

tanpa memperhatikan urutan bilangan real a, b, dan c.

Teorema 2.10

Jika fungsi f terintegral Riemann pada selang [a,b] dan $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$ maka $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$

Akibat 2.11

Jika f dan g masing-masing fungsi yang terintegral Riemann pada selang [a,b] serta f(x) ≤ g(x), ∀x∈ [a,b] maka $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$

Teorema 2.12

Jika fungsi f kontinu pada selang [a,b] dan F suatu anti turunan dari f pada selang [a,b] maka $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$

Contoh 2.13

Find the following integrals

1. $\int_0^3 (x^3 + \sqrt{x})dx$
2. $\int_1^2 y^2(y^3 - 3)\,dy$
3. $\int_1^9 x\sqrt{x-4}\,dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3t^2 - 2\sin t)\,dt$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\sqrt{1-\sin t}\,dt$
6. $\int_0^1 (5x^2+1)\sqrt{5x^3+3x-2}\,dx$

3 TERAPAN (*APPLICATION*) INTEGRAL

A. Luas dan Volum Benda Putar

Berdasarkan definisi 2.9, perkalian $|f(t_i)|$ dan $\Delta_i x$ pada setiap subselang ke-i, merupakan luas persegi panjang. Jadi **hakekat/esensi** integral tertentu adalah luas.

Definisi 3.1

Diketahui fungsi f dan g masing-masing terintegral Riemann.

a. **Luas daerah D** yang **dibatasi** oleh grafik fungsi f dengan **f(x) ≥ 0** $\forall x \in [a,b]$, sumbu X, garis x = a, dan garis x = b adalah $L_D = \int_a^b f(x)\,dx$.

b. **Luas daerah D** yang **dibatasi** oleh grafik f(x), sumbu X, garis x = a, dan garis x = b adalah

$$L_D = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

c. Luas daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi f dan fungsi g (dengan **f (x) ≥ g(x)**, $\forall x \in [a,b]$), garis x = a, dan garis x = b adalah

$$L_D = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx.$$

Analog dengan definisi 3.1 dapat dihitung juga luas daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi f (asalkan fungsi **inversnya ada**), sumbu Y, garis y = a, dan garis y = b.

Contoh 3.2

1. Tentukan luas daerah D yang dibatasi oleh
   a. grafik $f(x) = x^2 - 4x + 5$, sumbu X, garis x = 1, dan garis x = 4.
   b. grafik $f(x) = 2x - x^2$, sumbu X, dan garis x = −2.
   c. grafik $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, grafik $g(x) = \frac{1}{4}(x+6)$, dan garis x = −1.
   d. grafik $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, sumbu Y, garis y = −1, dan garis y = 2.
2. Jika D adalah daerah yang dibatasi oleh sumbu X dan grafik $f(x) = 4 - x^2$, berapakah a sehingga y = a mem-
   bagi D menjadi dua bagian yang sama luasnya?

Penyelesaian:

1.a. Jelas $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [1,4]$. Jadi

$$L_D = \int_1^4 (x^2 - 4x + 5)\,dx = (\tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x)\Big]_1^4 = 6.$$

Jadi luas daerah D adalah 6 satuan luas.

Perkalian $f(t_i)$ dan $\Delta_i x$ pada setiap subselang ke-i meru-pakan "luas" persegi panjang, yang jika **diputar** me-ngelilingi sumbu X, menghasilkan suatu **tabung/silin-der** dengan volum $\boldsymbol{\pi(f(t_i))^2 \Delta_i x}$ satuan volum.

Definisi 3.3

Daerah D **dibatasi** oleh grafik fungsi f dengan $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, sumbu X, garis x = a, dan garis x = b. Jika D diputar **mengelilingi sumbu X** maka **volum benda putar** yang terjadi adalah $V_D = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$.

Dengan memperhatikan partisi yang dibentuk, jika D diputar mengelilingi sumbu Y maka dapat juga dihitung
volum benda putarnya.

Contoh 3.4

1. Misalkan D daerah yang dibatasi oleh sumbu X, gra-fik $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, garis x = 0, dan garis x = 4. Hitung volum benda putar yang terjadi jika D diputar
   a. mengelilingi sumbu X
   b. mengelilingi sumbu Y.
2. Jika D daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = 2x^2$ dan grafik $g(x) = x^3$, tentukan volum benda putar yang terjadi jika D diputar
   a. mengelilingi sumbu X
   b. mengelilingi sumbu Y.

4 FUNGSI TRANSENDEN

A. Fungsi Logaritma Natural (Asli)

Jika f kontinu pada selang [a,b] dan x$\in$ [a,b] maka $\dfrac{d\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)}{dx} = f(x),$ karena a suatu konstanta.

Jadi F(x) = $\int_a^x f(t)\,dt$ dengan F suatu anti turunan dari f.

Jelas bahwa $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c,$ dengan n $\neq -1$.

Bagaimana dengan $\int_a^b \frac{1}{t}\,dt$?

Definisi 4.1

Fungsi **logaritma natural** didefinisikan $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,$ dengan **x > 0**, yaitu suatu **fungsi batas atas**.

Jelas bahwa $\dfrac{d \ln x}{dx} = \dfrac{1}{x},$ untuk x > 0.

Contoh 4.2

Tentukan $\dfrac{d \ln(x^2 - x - 2)}{dx}$ dan $\dfrac{d \ln|x|}{dx}$.

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh

$\dfrac{d \ln(x^2 - x - 2)}{dx} = \dfrac{2x - 1}{(x^2 - x - 2)},$ dengan

x$\in$ $(-\infty,1) \cup (2,\infty)$.

Jelas untuk x > 0 maka $\dfrac{d \ln|x|}{dx} = \dfrac{d \ln x}{dx} = \dfrac{1}{x}$ sedangkan untuk x < 0 maka

$\dfrac{d \ln|x|}{dx} = \dfrac{d \ln(-x)}{dx} = \dfrac{1}{x}$.

Definisi 4.3

Untuk x $\neq$ 0 diperoleh $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$.

Teorema 4.4

Jika $a,b\in\mathbb{R}$**,** $\boldsymbol{a > 0, b > 0}$ dan $\mathbf{r}\in\mathbb{Q}$ maka berlaku

a. $\ln 1 = 0$ b. $\ln ab = \ln a + \ln b$

c. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b,\ b \neq 0$ d. $\ln a^r = r \ln a$.

Contoh 4.5

1. Determine $\frac{dy}{dx}$ if

   a. y = ln (x^2 −5x + 6) b. $y = \ln\sqrt{3x-25}$

   c. $y = \frac{\ln x}{x^2}$ d. $y = \frac{1}{\ln x} + \ln\frac{1}{x}$.

B. Fungsi Eksponen Asli dan Umum

Jika f(x) = ln x dengan $D_f = (0,\infty)$ maka f kontinu dan naik monoton, jadi f **mempunyai invers**.

Definisi 4.6

Untuk $y\in(0,\infty)$ didefinisikan $\mathbf{x = \ln y \Leftrightarrow y = e^{x}}$.

Teorema 4.7

$\forall x_1, x_2\in\mathbb{R}$ dan $\forall r\in\mathbb{Q}$ berlaku

a. $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ b. $\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$

c. $\left(e^{x_1}\right)^r = e^{x_1 r}$.

Teorema 4.8

$\forall x\in\mathbb{R}$ berlaku $\frac{de^x}{dx} = x$, akibatnya $\int e^x dx = e^x + C$.

Teorema 4.9

Jika $a,x,y\in\mathbb{R}$ dan **a > 0** maka berlaku

a. $a^x a^y = a^{x+y}$ b. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

c. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$.

Teorema 4.10

$\forall a, x \in \mathbb{R}$ dan $\boldsymbol{a > 0}$ maka $\dfrac{da^x}{dx} = a^x \ln a$ dan akibatnya $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ (dengan $a \neq 1$).

B. Fungsi Hiperbolik

Definisi 4.11

Kombinasi dari $\boldsymbol{e^x}$ dan $\boldsymbol{e^{-x}}$ menghasilkan definisi

a. Cosinus hiperbolik, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

b. Sinus hiperbolik, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

c. Selanjutnya $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$, $\quad \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$, $\quad \text{sech}\, x = \dfrac{1}{\cosh x}$, $\quad \text{csch}\, x = \dfrac{1}{\sinh x}$.

Teorema 4.12

$$\frac{d \sinh x}{dx} = \cosh x, \quad \frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x, \quad \frac{d \tanh x}{dx} = \text{sech}^2 x$$

5 TEKNIK PENGINTEGRALAN

A. Integral $\sin^n x$, $\cos^n x$, $\sin^n x$, $\cos^m x$, dan $\sin nx.\cos mx$

Akan dibahas integral dari fungsi trigonometri ber-pangkat ganjil atau genap atau kombinasinya. Penyelesaiannya menggunakan persamaan trigonometri yang sudah dikenal.

Contoh 5.1
Determine

$$1.a.\int \sin^2 x\,dx \quad b.\int \cos^2 x\,dx \quad c.\int \sin^3 x\,dx \quad d.\int \sin^4 x\,dx$$

$$e.\int \cos^3 3x\,dx \quad f.\int \sin^3 x\cos x\,dx \quad g.\int \sin^2 2x\cos^3 2x dx$$

$$h.\int \sin^2 3x\cos^4 3x dx \quad i.\int \sin 2x\cos 3x\,dx$$

B. Integral Fungsi Bentuk Rasional Polinomial

Fungsi rasional polinomial mempunyai bentuk umum $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, dengan p(x) dan q(x) masing-masing polinomial. Langkah awal yaitu membandingkan de-rajat/pangkat p(x) dan q(x).

1. Jika der p(x) $\geq$ der q(x) maka dibagi biasa. Jika der p(x) < der q(x) maka difaktorkan menjadi faktor-faktor linear atau kuadrat, kemudian diubah menjadi pecahan bagian.
2. Diintegralkan menggunakan rumus-rumus teknis atau sifat-sifat integral.

Contoh 5.2
Jelas $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{-1}{x+1}$, jadi

$$\int \frac{1}{x(x+1)}dx=\int \frac{1}{x}dx+\int \frac{-1}{x+1}dx=\ln x-\ln(x+1)+C.$$

Jelas

$$\frac{x^2+6x+1}{x(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+x++1)^2}\Leftrightarrow A=1,$$

$$B=-1, C=-1, D=0, \text{dan } E=5.$$

Jadi $\int \frac{x^2+6x+1}{x(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{5}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

Latihan

1. $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}\,dx$ 2. $\int \frac{5x+3}{x^2-9}\,dx$ 3. $\int \frac{2x^2+x-4}{x^3-x^2-2x}\,dx$

4. $\int \frac{3x^3}{x^2+x-2}\,dx$ 5. $\int \frac{x^4+x^3-3x^2+4x+2}{x^2+x-2}\,dx$ 6. $\int \frac{x+1}{(x-3)^2}\,dx$